ANNO SCOLASTICO 2015/16

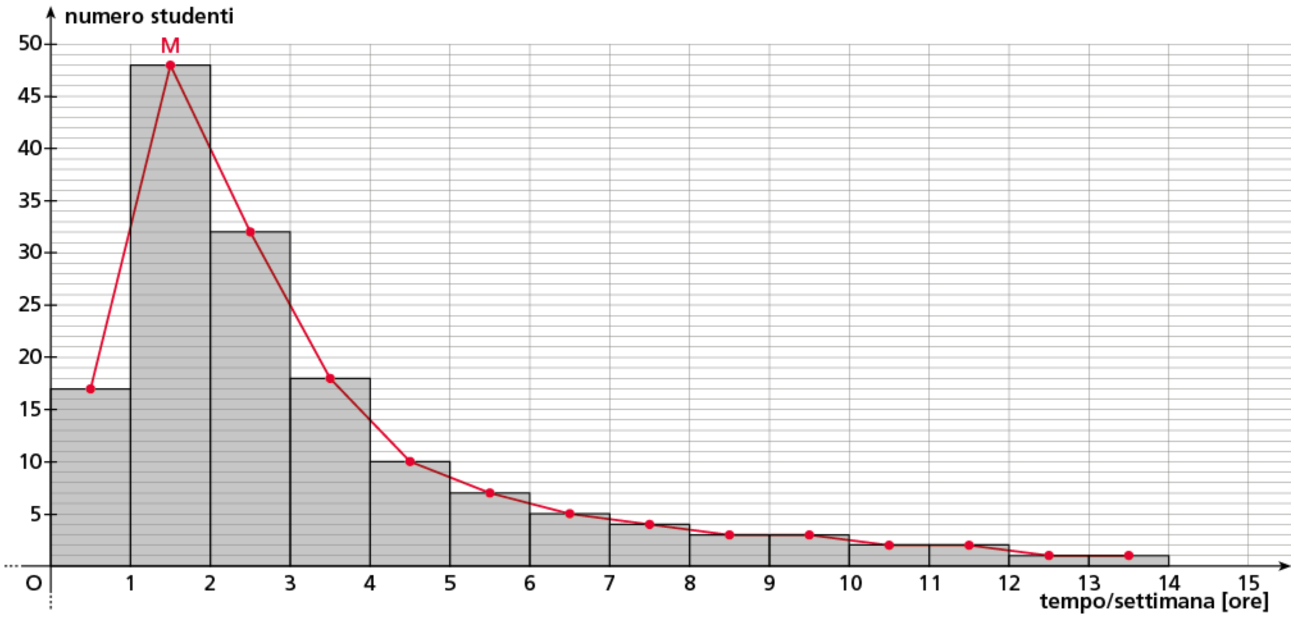
SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1 – Conversazioni telefoniche

È stata condotta un'indagine su un gruppo di studenti di una scuola superiore; a ciascuno studente è stato chiesto di registrare, nel corso di una settimana, la durata totale di tutte le conversazioni telefoniche effettuate e ricevute tramite il proprio cellulare. I dati raccolti sono stati riassunti nell'istogramma sottostante, in cui l'altezza di un ogni rettangolo rappresenta il numero di studenti che hanno dichiarato una durata totale delle conversazioni settimanali maggiore di t ore e minore o uguale di $t+1$ ore. La spezzata in colore, che congiunge i punti corrispondenti ai valori centrali di ogni classe, è il grafico di una funzione di t, lineare a tratti, detta *poligono delle frequenze*.



Si vuole cercare una funzione del tempo t, definita, continua e derivabile per ogni $t \geq 0$, che approssimi l'andamento del poligono delle frequenze dell'istogramma.

a) Dimostra che comunque si scelgono le costanti reali positive A e B, la funzione

$$f(t) = Ate^{-Bt}$$

ristretta al dominio $\mathbb{R}_0^+$ manifesta un andamento qualitativamente simile a quello del poligono delle frequenze.

Osservando l'istogramma si deduce che le classi hanno tutte la stessa ampiezza, pari a un'ora. La quantità $S(t)$ = «somma delle aree dei rettangoli le cui basi sono comprese nell'intervallo $[0;t]$», con t intero positivo, corrisponde quindi al numero di studenti che hanno dichiarato un tempo totale di conversazioni settimanali minore o uguale a t ore. $S_{14} = S(14) = 153$ rappresenta allora il numero totale degli studenti coinvolti nell'indagine.

b) Ricava i valori delle costanti A e B in modo che siano soddisfatte le seguenti due condizioni:

- il massimo relativo di $f(t)$ si verifichi in corrispondenza della stessa ascissa del massimo M dell'istogramma;
- l'area del sottografico della funzione $f(t)$ nell'intervallo $[0;+\infty[$ sia uguale a S_{14}.

c) Verificato che i valori delle costanti che soddisfano le richieste precedenti sono $A=68$ e $B=\dfrac{2}{3}$, studia e rappresenta la corrispondente funzione $f(t)$. In particolare, determina il valore massimo di $f(t)$.

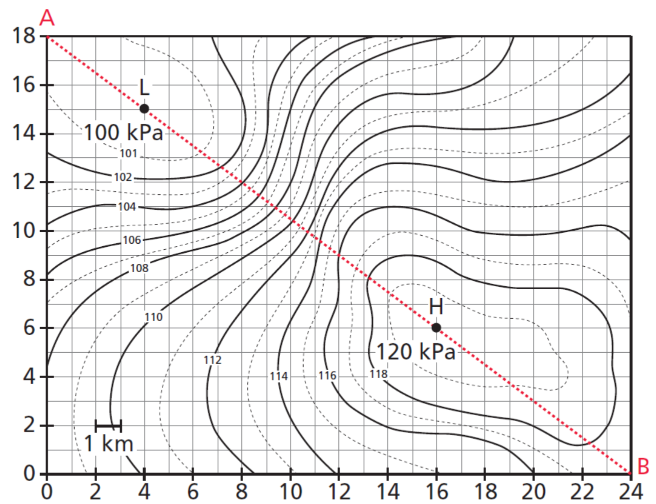
d) Calcola $\int_0^4 f(t)\,dt$ e spiega che cosa rappresenta per la situazione in contesto.

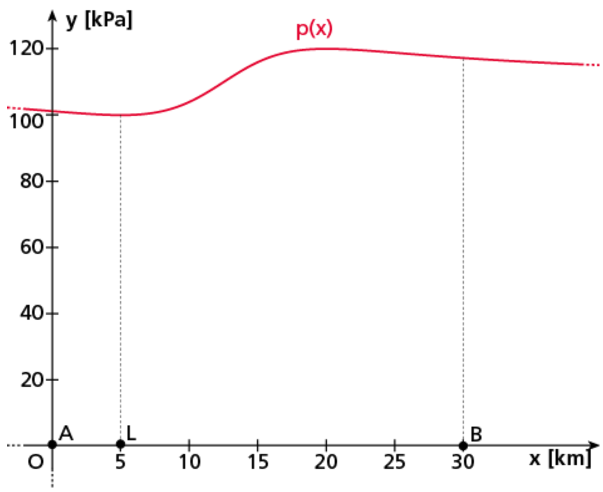
e) Che significato ha il rapporto $p(4)=\dfrac{\int_0^4 f(t)\,dt}{S_{14}}$?

f) Calcola la percentuale di studenti che hanno dichiarato una durata delle conversazioni maggiore di 2 ore e minore o uguale a 3 ore, sia secondo i dati dell'istogramma sia secondo il modello della funzione $f(t)$.

Problema 2 – Previsioni meteorologiche

Nel sito web della stazione meteorologica cittadina sono stati pubblicati, come ogni giorno, due grafici. Il primo grafico visualizza la distribuzione locale della *pressione atmosferica* al suolo mediante linee di livello (*isobare*) che uniscono i punti aventi la stessa pressione (misurata in kilopascal, kPa). Le linee di livello corrispondono a valori consecutivi della pressione atmosferica (100, 101, 102, …). La diagonale AB passa per i punti L e H, dove la pressione assume rispettivamente un minimo (100 kPa) e un massimo (120 kPa). Il secondo grafico rappresenta l'andamento della pressione $p(x)$ in funzione della posizione x lungo la diagonale AB (x è espresso in kilometri, con origine in A).





a) Utilizzando i dati del primo grafico, individua sul secondo grafico il punto corrispondente ad *H*, fornendone ascissa e ordinata.

b) Una delle seguenti funzioni rappresenta la funzione $p(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le 30$, con *a*, *b* costanti reali non nulle. Stabilisci quale, in base ai dati forniti nei grafici.

$$y_1(x) = 500\left(a + be^{-x}\right) \qquad\qquad y_2(x) = \frac{300(2x+a)}{(2x+a)^2 + 225} + b$$

Per la funzione così determinata, ricava i valori delle costanti *a* e *b*.

c) Verificato che è la seconda funzione a rappresentare i dati riportati nel grafico, con $a = -25$ e $b = 110$, studia la corrispondente funzione $p(x)$ nel suo dominio naturale, indicando in particolare quanti punti di flesso ammette senza ricorrere allo studio della derivata seconda.

d) Ricava il valore medio della pressione atmosferica lungo il tratto *AB*.

Considera ora il riferimento cartesiano $Oxyz$ avente origine nel vertice in basso a sinistra della mappa delle isobare, l'asse passante per B come asse *x*, quello passante per A come asse *y* e asse *z* uscente dal foglio. Un programma di grafica permette di rappresentare tridimensionalmente l'andamento della pressione $z = p(x; y)$ in funzione della posizione $(x; y)$ nel piano della mappa delle isobare.

e) In tale riferimento ricava le equazioni parametriche e quelle cartesiane della retta r congiungente i punti $L'\left(x_L; y_L; p(x_L; y_L)\right)$ e $H'\left(x_H; y_H; p(x_H; y_H)\right)$.

Questionario

1. Esiste un valore della costante reale a per il quale l'equazione differenziale
$xy'' + ay' = 2a - 1$
abbia come soluzione la funzione $y(x) = \ln x + x$? Motiva la risposta.

2. Una vasca cubica di 2 m per lato contiene inizialmente 2 m^3 d'acqua. A un istante $t = 0$ si apre un rubinetto che immette acqua nella vasca al ritmo costante di 10 m^3 all'ora e nello stesso istante si apre lo scarico della vasca. Sapendo che l'acqua defluita dallo scarico dopo t ore è pari a $t\left(10 - e^{1-t}\right)$ m^3, qual è il massimo livello raggiunto dall'acqua nella vasca? La vasca finirà per svuotarsi?

3. Dato nel riferimento $Oxyz$ il piano α di equazione $2\sqrt{2}x + 3y + 2\sqrt{2}z - 4 = 0$ e dette *A*, *B*, *C* le sue intersezioni con gli assi *x*, *y* e *z*, calcola l'area del triangolo *ABC* e la distanza di *O* dal piano α, poi determina il volume della piramide *ABCO*.

4. Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $\mathbb{R}$ tale che:
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$
Calcola, giustificando il procedimento, il seguente limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{2x} f(t)\,dt}{x^2}.$$

5. Data la funzione $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$, ricava le equazioni di tutte le rette tangenti al suo grafico passanti per il punto $A(0;4)$.

6. Data la funzione $f(x)=a\sqrt{x^2+9}$, determina per quale valore della costante reale positiva *a* i solidi ottenuti ruotando di 360° il sottografico di $f(x)$ compreso tra le ascisse $x=0$ e $x=4$ prima intorno all'asse *x* poi intorno all'asse *y* risultano equivalenti.

7. Considera la funzione $f(x)=x(|x|-1)$.

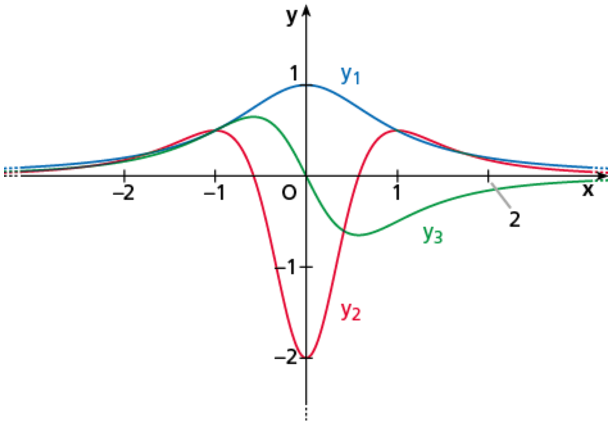
a) Stabilisci se $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1;1]$.

b) Stabilisci se $f(x)$ ammette punti di flesso nell'intervallo $[-1;1]$.

8. Nella figura a fianco sono riportati i grafici di una funzione $f(x)$, della sua derivata prima $f'(x)$ e della derivata seconda $f''(x)$. Associa $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ al giusto grafico.
Se uno dei tre grafici ha equazione

$$y(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2},$$

determina le equazioni degli altri due.



9. In un quiz televisivo un concorrente deve rispondere a 10 domande, ciascuna delle quali ha 4 risposte possibili fra cui una sola è corretta. Rispondendo a caso qual è la probabilità che il concorrente dia la risposta corretta a esattamente 6 domande, sufficienti per passare al gioco successivo?

10. Si lanciano 5 dadi regolari a sei facce. Detto *x* il numero di dadi che presentano un valore maggiore o uguale a 3, si compili la tabella della distribuzione di probabilità della variabile casuale *X* = *x* e se ne ricavino il valore medio e la deviazione standard.