***Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario***

**PROBLEMA 1**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $xOy$ , è dato il punto $A(-2;0)$. Condotta per *A* una retta *r* che forma col verso positivo dell'asse *x* un angolo α , sia *r*' la retta passante per l'origine *O* che forma col verso positivo dell'asse *x* un angolo 2α .

a) Trovare l'equazione del luogo geometrico $\gamma$ descritto dal punto *P* , intersezione delle rette *r* e *r*' al variare di α nell'intervallo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
b) Ottenuta l'equazione del luogo γ : $x^2+y^2=4$ con *y* > 0, indicare con *B* il punto di intersezione di $\gamma$ con l'asse *y* e con *C* il punto di coordinate $(2;0)$. Scrivere l'equazione della cubica $y=ax^3+bx^2+cx+d$, avente massimo relativo e minimo relativo, rispettivamente, nei punti *B* e *C* .
c) Studiare la cubica $\gamma_1$ ottenuta e rappresentarne il grafico rispetto ad un sistema di assi cartesiani $xOy$ . Calcolare l'area della superficie piana delimitata dalle curve $\gamma$ e $\gamma_1$.
d) Detta *t* la tangente *inflessionale* alla curva $\gamma_1$ e *s* la retta ad essa perpendicolare nel punto di flesso, calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di 360° attorno all'asse *x* , il triangolo formato dalle rette *t*, *s* e dall'asse *x* .

**PROBLEMA 2**

Si consideri la famiglia di funzioni reali definite da $f\colon x \;\rightarrow\; e^{2x}-(\lambda+1)e^x+3\lambda\;\; con\; \lambda\in\mathbb{R}\; e\; \lambda>-1.$

a) Mostrare che tutte le curve che rappresentano le funzioni della famiglia hanno un asintoto orizzontale.
b) Per ciascun valore di $\lambda>-1$ determinare, in funzione di $\lambda$ , l'ascissa del punto *M* della famiglia di funzioni la cui retta tangente è parallela all'asse *x* e mostrare che questo punto corrisponde ad un minimo per ogni curva della famiglia.
c) Si consideri la curva del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani. Si studi la funzione ottenuta determinando anche crescenza, decrescenza, punti di massimo, minimo e flesso. Rappresentare il grafico γ rispetto ad un sistema di assi cartesiani $xOy$.
d) Essendo $k\in\mathbb{R}\; con\; k<0$, determinare l'area $A(\kappa)$ della parte di piano compresa fra la curva γ, l'asse delle ascisse e le rette $x=k\;\; e\;\; x=\;0$. Calcolare quindi $\lim_{k\to-\infty}A(k)$ e interpretare geometricamente il risultato ottenuto.
e) Calcolare il volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa intorno all'asse *x* della parte di piano delimitata dalla curva γ e dalle rette $x=0\; e\; y=\frac{1}{2}$.

**QUESTIONARIO**

1. Data la funzione $f(x)=\frac{1-e^{1+x}}{1+e^{1+x}}$ , verificare se è invertibile. Detta $g(y)=f^{-1}(x)$ la funzione inversa di f(x), determinare la derivata $g'(y)$ in $y=0$

2. Data la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+ax & \text{per} -1\leq x<3\\ bx+c & \text{per } 3\leq x\leq 5\end{cases}$$

   a. Determinare i valori dei parametri reali $a$, $b$, $c$ in modo che la funzione $f(x)$ verifichi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [-1;5].

   b. Determinare l'ascissa del punto previsto dalla tesi del teorema e rappresentare graficamente la funzione ottenuta.

3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\int_e^{x^2}\frac{\ln t}{t}dt,$ nel punto di ascissa $x_0=\sqrt{e}.$

4. Dopo aver dato la definizione di derivata di una funzione f(x), applicando questa definizione calcolare la derivata della funzione f(x) = $\sin^3 x$ nel punto di ascissa x
5. La concentrazione C di un antibiotico nel sangue dopo un tempo $t$ dall'assunzione è data dalla funzione: $C(t)=\frac{5t}{1+\left(\frac{t}{k}\right)^2}$ , nella quale $k>0$ è un parametro reale dipendente dalle condizioni fisiche. Determinare il valore di $k$ se la massima concentrazione viene raggiunta dopo $t=6$ ore.
6. Fra le funzioni aventi derivata seconda $y''=-\cos x-2\sin 2x$ , individuare quella che nel suo punto $P\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ ha come retta tangente $y=-2x+\pi$

7. Un cono retto è circoscritto ad una sfera di raggio r. Esprimere il volume del cono in funzione del raggio di base x e determinare i valori di x per i quali il volume è minimo.

8. Una pallina si muove lungo una retta (asse y) seguendo la legge oraria $y(t)=2\cos(\omega t+\varphi)$ dove t rappresenta il tempo (misurato in secondi) e ω e φ sono costanti (con $-\pi<\varphi<0, 0<\omega<\pi$).

   a) Determinare il valore delle costanti ω e φ, sapendo che all'istante t = 0 la pallina si trova in $y=1$ e all'istante t = 1 si trova in $y=2$.
   b) Calcolare la velocità e l'accelerazione della pallina e individuare gli intervalli nel primo periodo in cui la velocità è positiva.
9. Dire se coincidono le funzioni $f(x)=5^{2+\log_5 x}$ e $g(x)=25x$

10. Dopo aver rappresentato la parabola di equazione $y=x^2-2$ e vertice V, si consideri su di essa l'arco VA appartenente al quarto quadrante. Tracciata la tangente t all'arco va nel suo punto di ascissa 1, calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di 360° attorno all'asse x la regione finita del piano delimitata da t, dall'arco VA e dall'asse x.

---

Durata massima della prova: 5 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore dalla consegna del tema