Liceo Scientifico Statale “Elio Vittorini” Via Mario Donati, 5 - Milano	Seconda prova **Matematica** sezioni **PNI**

Alunno	Nome	Cognome
Classe		Data 21 maggio 2013

Problema n°	Quesito n°	Quesito n°	Quesito n°	Quesito n°	Quesito n°

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario

PROBLEMA 1
In un piano, riferito a un sistema cartesiano xOy, è dato il punto $A(-2;0)$. Condotta per A una retta r che forma con il verso positivo dell’asse x un angolo α, sia r' la retta passante per l’origine O che forma con il verso positivo dell’asse x un angolo 2α.

a) Trovare l’equazione del luogo geometrico Γ descritto dal punto P, intersezione delle rette r ed r' al variare di α nell’intervallo $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
b) Ottenuta l’equazione del luogo geometrico Γ: $x^2+y^2=4$, con $y>0$, indicare con B il punto di intersezione di Γ con l’asse y e con C il punto i coordinate $(2;0)$. Scrivere l’equazione della cubica $y=ax^3+bx^2+cx+d$, avente massimo relativo e minimo relativo rispettivamente nei punti B e C.
c) Studiare la funzione della cubica ottenuta e rappresentare il suo grafico Λ nel sistema cartesiano xOy.
d) Calcolare l’area della superficie piana delimitata dalle curve Γ e Λ.
e) Dette t la tangente inflessionale alla curva Λ e s la retta ad essa perpendicolare nel punto di flesso, calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 360° intorno all’asse x del triangolo formato dalle rette t, s e dall’asse x.

PROBLEMA 2
Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x)=\begin{cases}2x(1-\ln x) & \text{per } x>0\\ 0 & \text{per } x=0\end{cases}$$

a) Tracciare in un sistema cartesiano xOy il grafico Λ di $f(x)$, con particolare riguardo a continuità e derivabilità nell’origine del sistema di riferimento.
b) Data la trasformazione τ di equazioni $\begin{cases}X=-\frac{1}{e^2}x\\ Y=\frac{1}{e^2}y\end{cases}$, stabilire la natura della trasformazione e determinare l’equazione della curva Λ_1, trasformata di Λ mediante la trasformazione τ.
c) Calcolare l’area della regione piana S delimitata da Λ e dall’asse x.
d) Calcolare l’area della regione piana delimitata da Λ_1 e dall’asse x.
e) Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di S attorno all’asse x.

QUESTIONARIO

1. Data la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{per } -1 \leq x < 3 \\ bx + c & \text{per } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

   a. Determinare i valori dei parametri reali a, b, c in modo che la funzione $f(x)$ verifichi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [-1;5].

   b. Determinare l'ascissa del punto previsto dalla tesi del teorema e rappresentare graficamente la funzione ottenuta.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \int_e^{x^2} \frac{\ln t}{t} dt$, nel punto di ascissa $x_0 = \sqrt{e}$.

3. Risolvere la seguente equazione:

$$\ln\binom{4}{x} - \ln\binom{5}{x} = \ln\binom{2}{x} - \ln\binom{3}{x}.$$

4. La concentrazione C di un antibiotico nel sangue dopo un tempo t dall'assunzione è data dalla funzione: $C(t) = \frac{5t}{1+\left(\frac{t}{k}\right)^2}$, nella quale $k > 0$ è un parametro reale dipendente dalle condizioni fisiche. Determinare il valore di k se la massima concentrazione viene raggiunta dopo $t = 6$ ore.

5. Provare che l'equazione $x3^x = 1$ ammette una sola soluzione reale, compresa tra 0 e 1. Avvalendosi di un metodo numerico, calcolare un'approssimazione di tale soluzione a meno di 0,01.

6. Dati due dadi non truccati e identici, dire quale tra i seguenti eventi ha probabilità maggiore:

   a. In tre lanci di uno stesso dado il cinque esca soltanto una volta.

   b. In un lancio di due dadi, la somma delle facce sia 8.

7. Discutere il sistema parametrico $\begin{cases} x - \lambda y - z = \lambda - 1 \\ 2x + (\lambda + 1)y + z = 0 \\ -\lambda x + y + \lambda z = 1 - \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, alla luce del teorema di Rouché- Capelli.

8. In un giorno di sole, una sfera è posata su un terreno piano orizzontale. Ad un certo istante l'ombra della sfera raggiunge la distanza di 10 m dal punto in cui la sfera tocca il terreno. Nello stesso istante, un'asta di lunghezza 1 m posta verticalmente rispetto al terreno proietta un'ombra lunga 2 m. Trovare qual è il raggio della sfera, esprimendo la sua misura in centimetri.

9. Considerare la funzione $f(x) = x - \sqrt{x}$. Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il valore medio della funzione è $\frac{2}{3}$ nell'intervallo $[0;\ k\ ]$ con $k > 0$.

10. Il tempo di vita di un'apparecchiatura è mediamente di 54 mesi, con deviazione standard di 8 mesi. L'apparecchiatura ha un periodo di garanzia di 3 anni. Dire qual è la percentuale di apparecchiature che richiede interventi in garanzia, esplicitando le assunzioni.

Durata massima della prova: 5 ore.
E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore dalla consegna del tema