Geometria non euclidea.
L’idea di spazio matematico

Renato Betti
Politecnico di Milano

Liceo Scientifico E. Vittorini
Milano
14 novembre 2007

Il fatto

A metà '800 giunge a conclusione il "problema delle parallele", originato almeno con l'opera di Euclide nel III a.C.

L'importanza

La scoperta delle geometrie non euclidee è stato un passo decisivo per liberare l'idea di "spazio" da una corrispondenza troppo rigida con la "realtà fisica"

Nascono gli "spazi matematici"

I postulati euclidei della geometria piana

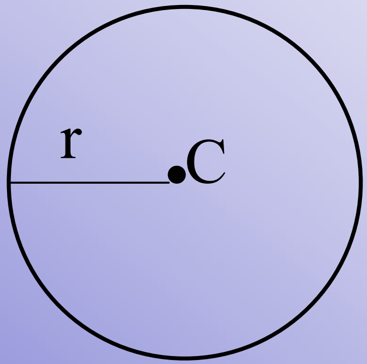
I. *Per due punti passa una sola retta*

A *B*

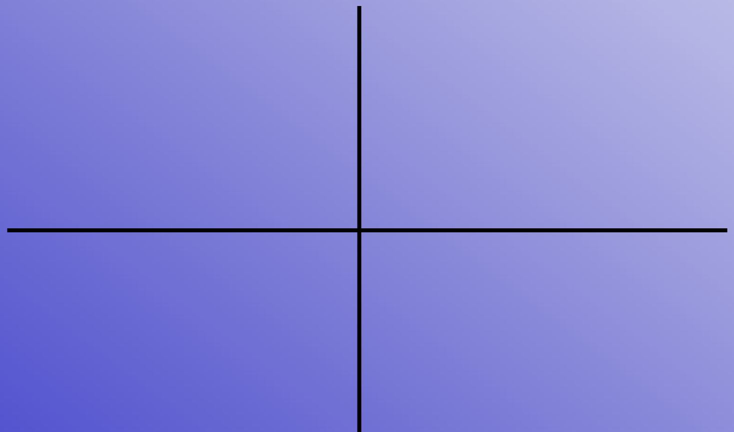
II. *Ogni segmento si può prolungare indefinitamente da entrambe le parti*

I postulati euclidei della geometria piana

III. *Dati un punto ed una distanza si può sempre tracciare una circonferenza che ha centro nel punto e raggio uguale alla distanza data*

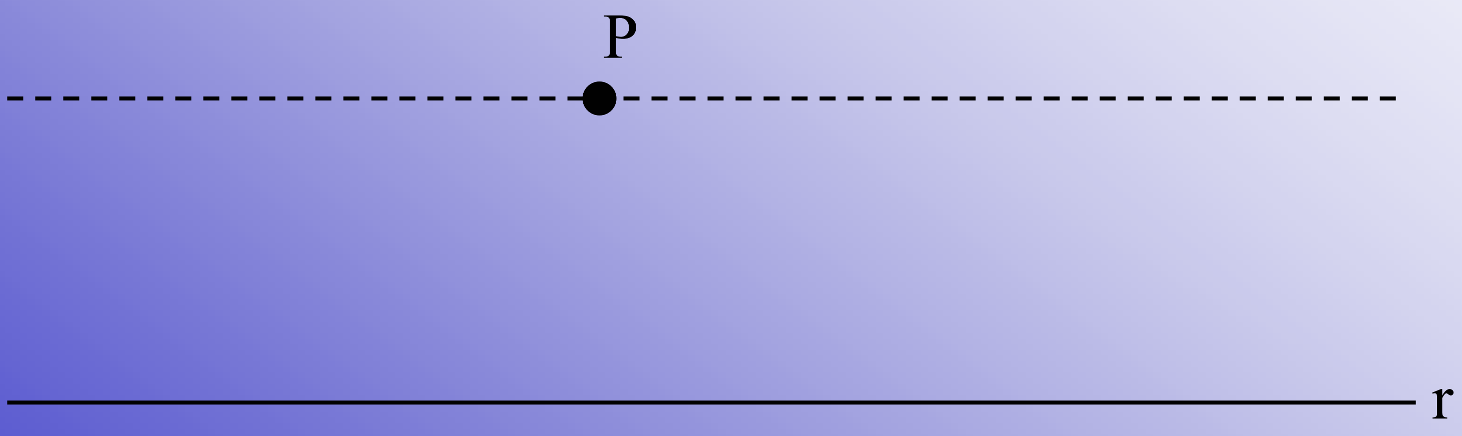


IV. *Gli angoli retti sono uguali fra di loro*

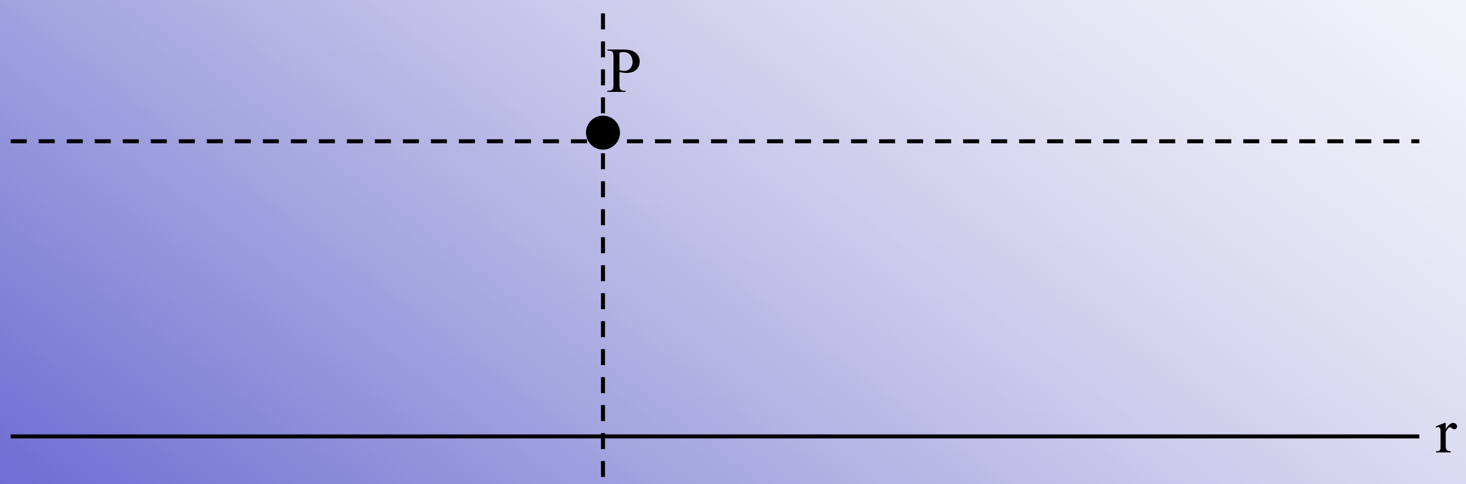


I postulati euclidei della geometria piana

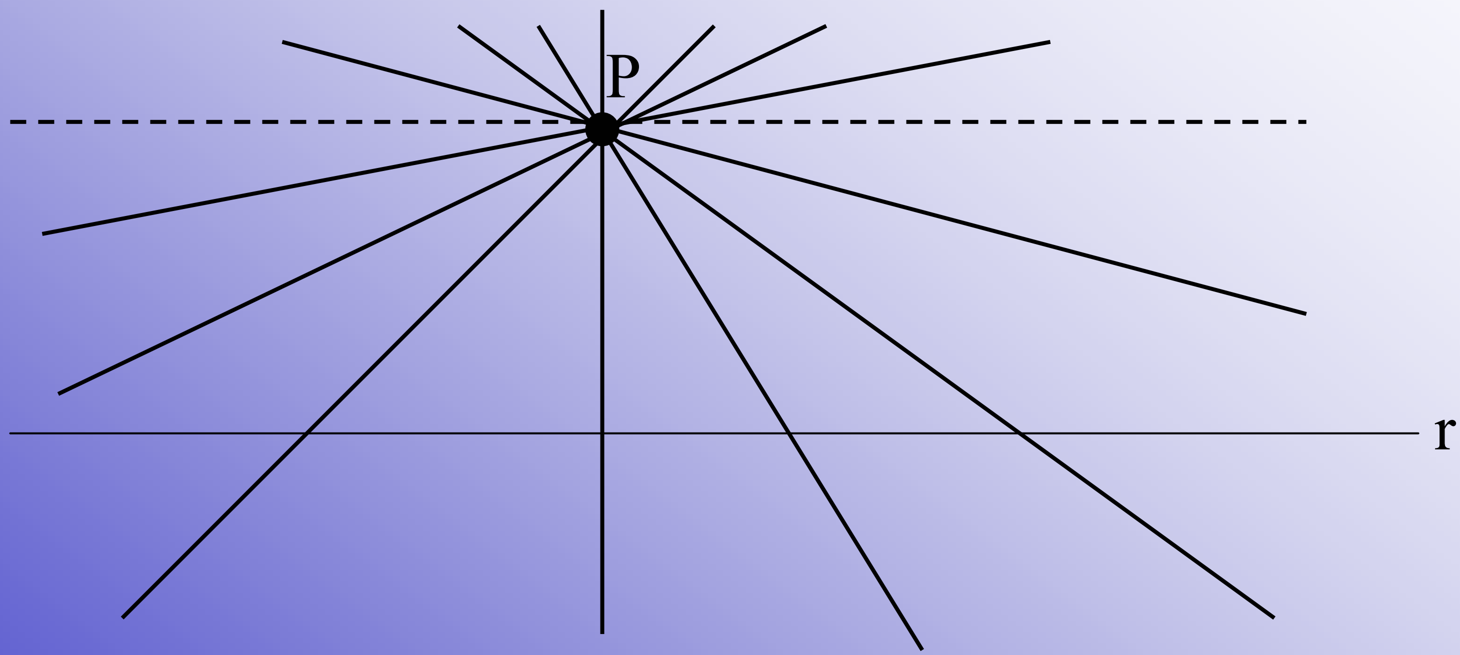
V. Postulato delle parallele: *dati una retta ed un punto fuori di essa, esiste una sola retta parallela alla retta data e passante per il punto*



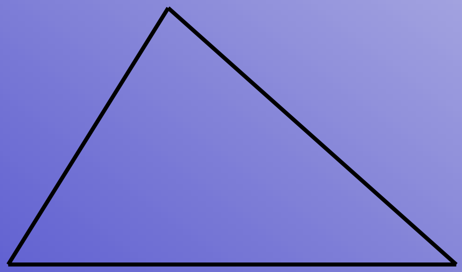
La parallela euclidea

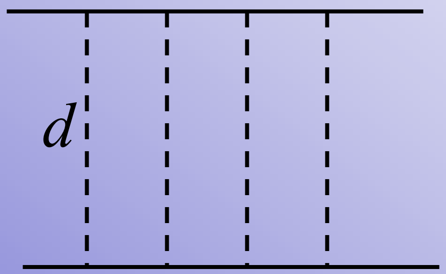


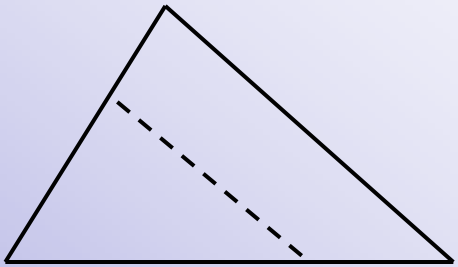
Il problema della parallele



Proprietà equivalenti al postulato delle paralelle







$A+B+C=180$

...la definizione e le proprietà della retta e quella delle parallele sono lo scoglio e per così dire lo scandalo degli elementi della geometria.

d'Alembert, 1759

Postulato euclideo

Esiste un'unica parallela a r passante per P

Postulato non euclideo iperbolico

Esistono almeno due parallele a r passanti per P

Postulato non euclideo ellittico

Non esistono parallele ad r passanti per P

I protagonisti

C.F. Gauss (1777-1855)

I protagonisti

N.I. Lobačevskij (1792-1856)

J. Bolyai (1802-1860)

КАЗАНСКІЙ

ВѢСТНИКЪ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

при

ИМПЕРАТОРСКОМЪ

КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ЧАСТЬ ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ.

КНИЖКА I.

МѢСЯЦЪ ГЕНВАРЬ

1829

Печатано въ Университетской Типографіи.

Титульный лист первой книжки журнала „Казанский вестник“ за 1829 г.

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ(*).

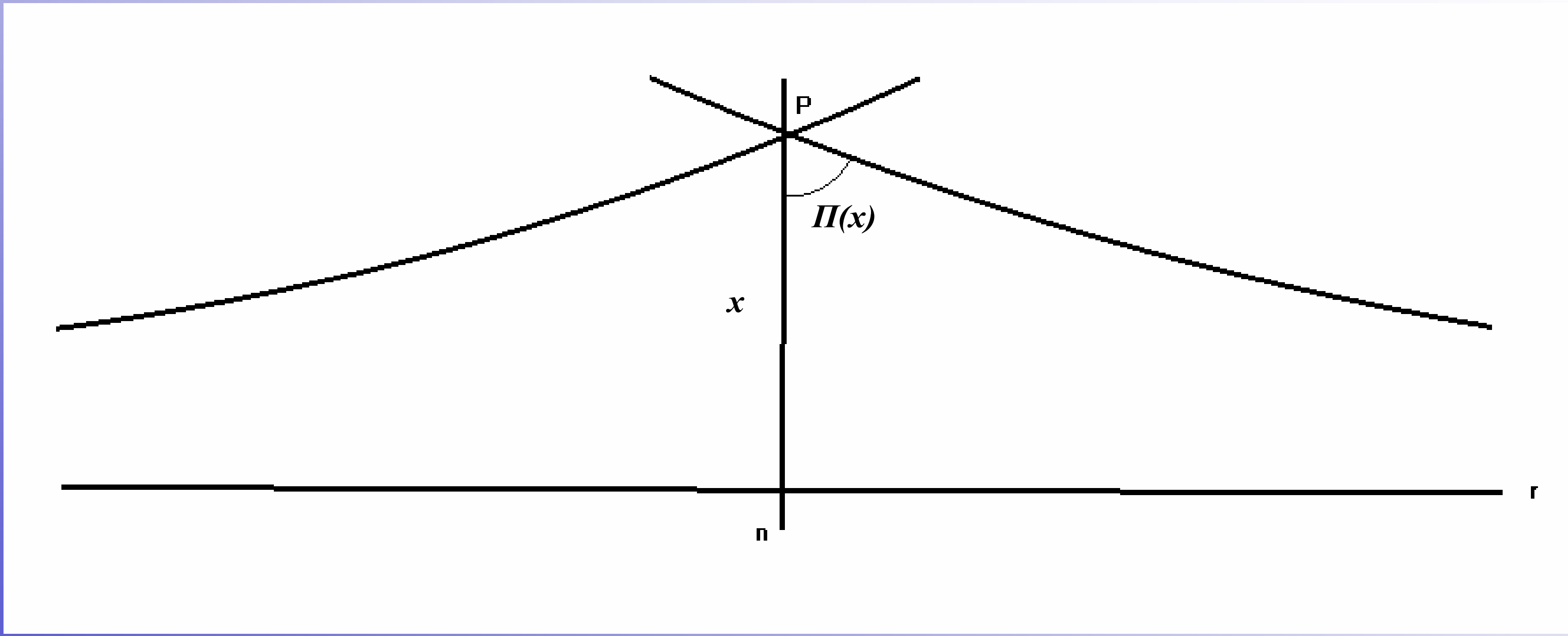
(Г. Лобачевскаго.)

Кажется, трудность понятій увеличивается по мѣрѣ ихъ приближенія къ начальнымъ истинамъ въ природѣ; также какъ она возрастаетъ въ другомъ направленіи, къ той границѣ, куда стремится умъ за новыми познаніями. Вотъ почему трудности въ Геометріи должны принадлежать, вопервыхъ, самому предмету. Далѣе, средства, къ которымъ надобно прибѣгнуть, чтобы достигнуть здѣсь послѣдней строгости, едва ли могутъ отвѣчать цѣли и пристойности сего ученія. Тѣ, которые хотѣли удовлетворить симъ требованіямъ, заключили себя въ такой тѣсной кругъ, что всѣ усилія ихъ не могли быть вознаграждены успѣхомъ. Наконецъ скажемъ и то, что со времени Ньютона и Декарта, вся Математика, сдѣлавшись Аналитикой, пошла столь быстрыми шагами впередъ, что оставила далеко за собой то ученіе, безъ котораго могла уже об-

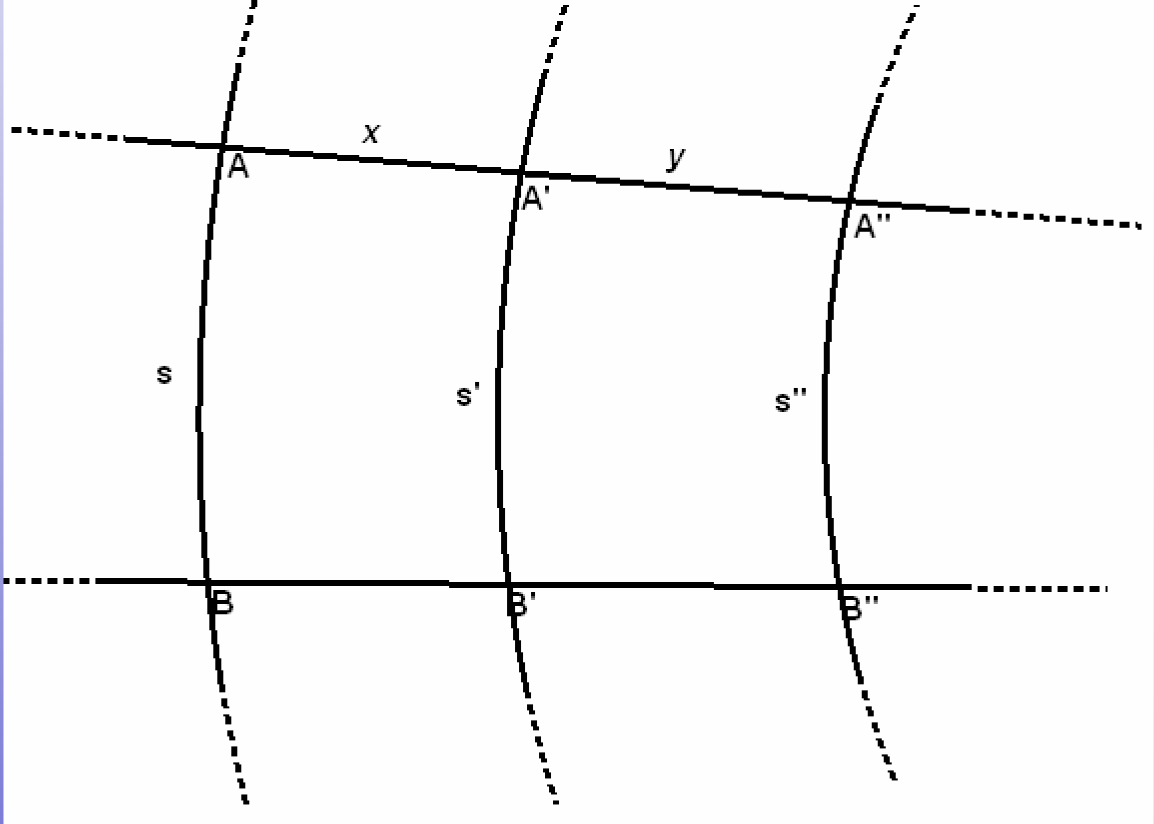
(*) Извлечено самимъ Сочинителемъ изъ разсужденія, подъ названіемъ: *Exposition succincte des principes de la Géométrie etc.*, читаннаго имъ въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ, 12 Февраля 1826 года.

Первая страница сочинения „О началах геометрии“
(стр. 178 журнала „Казанский вестник“, кн. 2—3 за 1829 г.)

L'angolo di parallelismo *Π(x)*



Teorema: ***L'angolo di parallelismo Π(x) è una funzione monotona decrescente di x. Inoltre, per ogni $0 < \alpha < \pi/2$ esiste un valore di x tale che $\Pi(x)=\alpha$.***



$$A'B' = AB\ \varphi(x)$$

$$A''B'' = A'B'\ \varphi(y) \quad ==> \quad A''B'' = AB\ \varphi(x+y) = AB\ \varphi(x)\ \varphi(y)$$

$$s' = s \cdot a^{-\boldsymbol{x}}$$

$$s' = s \cdot e^{-\boldsymbol{x}/\boldsymbol{k}}$$

$$s' = s \cdot e^{-\boldsymbol{x}}$$

L'equazione fondamentale della geometria iperbolica

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ \Pi(x) = a^{-x} = e^{-x/k}$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ \Pi(x) = e^{-x}$$

… la trigonometria sferica non dipende dal fatto che in un triangolo piano la somma degli angoli interni sia uguale a due angoli retti oppure no.

Supponendo ora che una qualche contraddizione ci obblighi a rifiutare i principi che abbiamo assunto in questa nuova geometria, questa contraddizione può nascondersi solo nelle equazioni della trigonometria piana. Osserviamo tuttavia che queste equazioni si mutano in quelle della trigonometria sferica non appena ai lati a, b, c sostituiamo $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}.$

L'approssimazione euclidea

… se i lati del triangolo a,b,c sono molto piccoli, è possibile considerare i valori approssimati

$$tg\Pi(x) = \frac{1}{x}$$

$$sen\Pi(x) = \frac{2}{2+x^2}$$

$$\cos\Pi(x) = \frac{2x}{2+x^2}$$

===>

$$b \cdot sen\ A = a \cdot sen\ B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$a \cdot sen\ (A+C) = b \cdot sen$$

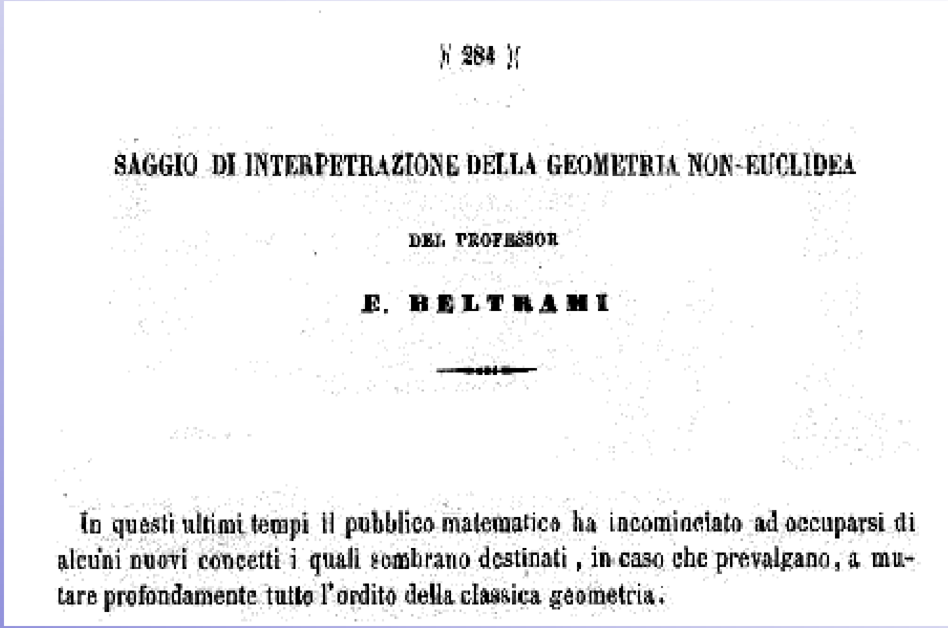
$$\cos A + \cos\ (B+C) = 0$$

$$A + B + C = \pi$$

Le equazioni** [della trigonometria piana] **sono già da sole sufficienti per considerare come possibili le proprietà della geometria immaginaria. Tuttavia, non disponiamo di nessun metodo diverso dalle osservazioni astronomiche per giudicare della precisione fornita dai calcoli della geometria ordinaria….

… Questa precisione si estende molto, ad esempio, per i triangoli i cui lati sono accessibili alle nostre misure, la somma degli angoli non differisce da due angoli retti neppure per una frazione di secondo.

I modelli non euclidei



284

SAGGIO DI INTERPETRAZIONE DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

DEL PROFESSOR

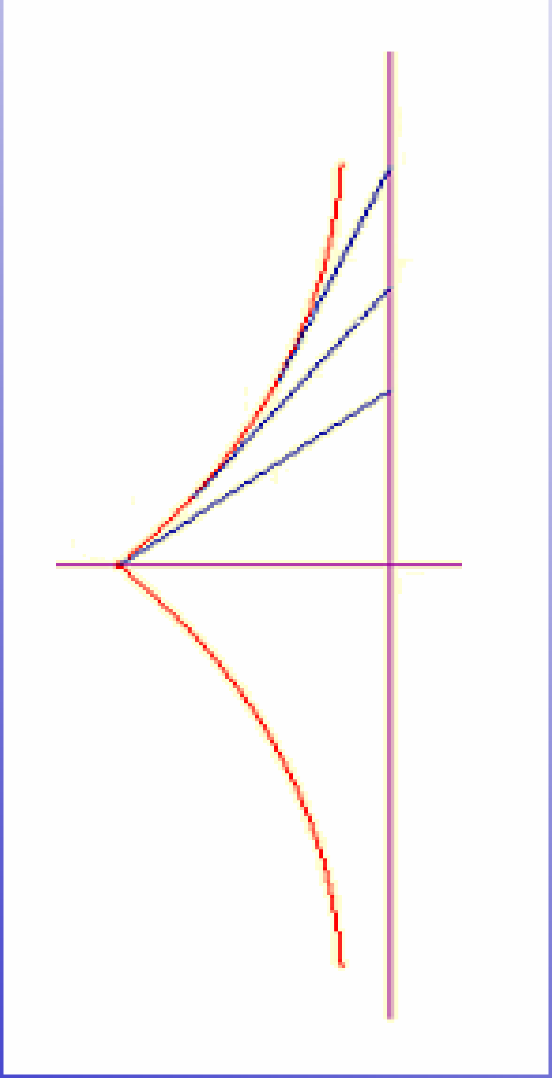
E. BELTRAMI

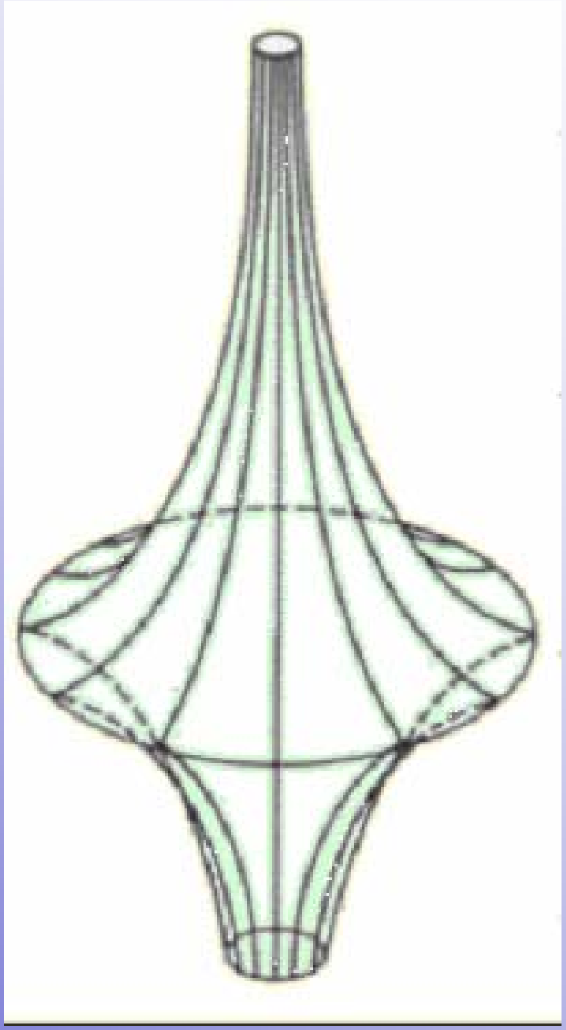
In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria.

Eugenio Beltrami (1835-1900)

1868

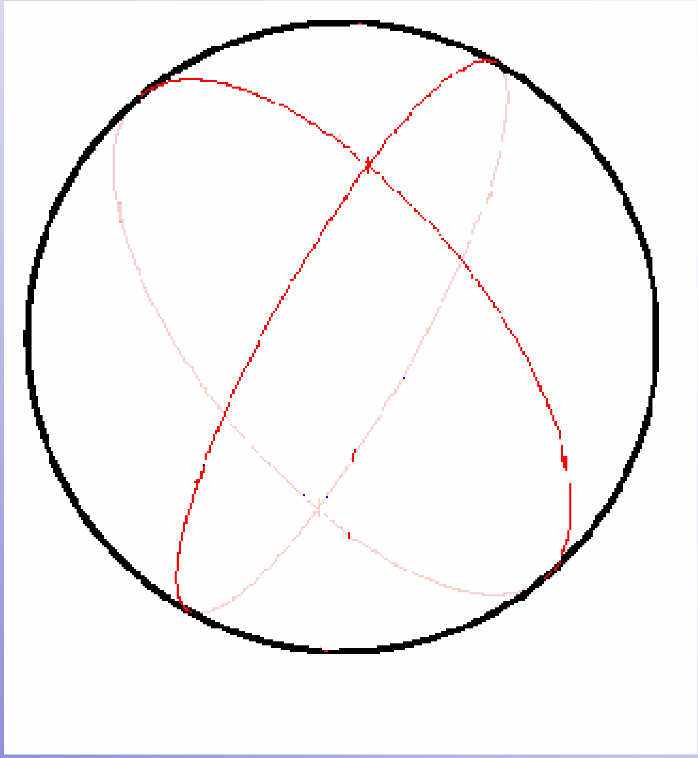
I modelli non euclidei: la pseudosfera





I modelli non euclidei

Bernhard Riemann (1826-1866)



La geometria della sfera

La concezione dello spazio in Lobačevskij

***“Lo spazio in sé, separatamente considerato, per noi non esiste. Detto ciò, nessuna contraddizione può presentarsi nella nostra mente ammettendo che certe forze in natura seguano una loro particolare geometria e altre, un’altra*”.**

(Nuovi principi della geometria, 1835-1838)

In fisica

"Rimane qui da studiare il tipo di cambiamento che viene determinato dall'introduzione della geometria immaginaria nella meccanica, se non si trovino qui dei concetti già accettati e indubbi sulla natura delle cose che ci obbligano a limitare o addirittura non ammettere la dipendenza dei segmenti dagli angoli. Tuttavia, si può prevedere che i cambiamenti in meccanica dovuti ai nuovi principi della geometria saranno dello stesso genere di quelli mostrati dal signor Laplace (Mécanique Céleste t.I, libro I, cap. II) supponendo possibile ogni dipendenza della velocità dalla forza o – più propriamente – supponendo che le forze, misurate sempre da velocità, siano soggette ad altre leggi oltre la loro composizione".

(Sui principi della geometria, 1829-1830)

Lobačevskij: "*Non si può dubitare di un'unica cosa, che le forze producano da sé i movimenti, le velocità, il tempo, le masse e perfino le distanze e gli angoli*".

(Nuovi principi della geometria, 1835-1838)

… la cultura scientifica

"…se Dio esiste, e se in realtà ha creato la terra, l'ha creata, come ci è perfettamente noto, secondo la geometria euclidea, e ha creato lo spirito umano dandogli soltanto la nozione delle tre dimensioni dello spazio. Nondimeno si sono trovati e si trovano tuttora geometri e filosofi, anche fra i più illustri, i quali dubitano che tutto l'universo o, con espressione anche più larga, tutto l'esistente sia stato creato soltanto in conformità della geometria euclidea, e osano perfino supporre che due linee parallele, le quali, secondo Euclide, non possono assolutamente incontrarsi sulla terra possano invece incontrarsi in qualche punto dell'infinito.

***Confesso umilmente di non avere alcuna attitudine a risolvere tali problemi, io ho uno spirito euclideo, terrestre…sono tutti problemi assolutamente non adeguati a uno spirito creato con la sola nozione delle tre dimensioni*”.**

(Dostoevskij, I fratelli Karamazov –1880)

"E che cosa immagini quando ti dicono che due linee parallele si intersecano nell'infinito? Io credo che se fossimo troppo coscienziosi non esisterebbe la matematica"….

… Secondo me è possibilissimo che qui gl'inventori della matematica abbiano inciampato nei propri piedi. Perché mai, infatti, ciò che è al di là dei limiti del nostro intelletto non dovrebbe permettersi di giocare all'intelletto qualche tiro birbone?"

(Musil, I turbamenti del giovane Törless, – 1906)

L’idea di spazio

Euclide: *assiomatica assoluta*

Kant: *intuizione pura (sintetica a priori)*

Riemann: *ipotesi*

Helmholtz: *esperienza*

Klein: *trasformazioni delle figure*

Poincaré: *convenzione*

Hilbert: *assiomatica formale*